

Tesi di carattere teorico, con eventuale avviamento alla ricerca

1. Metodi di regolarizzazione per il problema di Keplero

Il classico problema di Keplero, che descrive il moto di un corpo soggetto all'attrazione gravitazionale di un sole fisso, si formalizza mediante una equazione differenziale con singolarità. La presenza di singolarità comporta la possibilità che le traiettorie del moto collidano con il sole, dando origine a soluzioni generalizzate.

La teoria della regolarizzazione ha come obiettivo la trasformazione dell'equazione originaria in un'equazione non singolare, per poter studiare il moto in corrispondenza delle collisioni.

Obiettivo principale della tesi è studiare vari approcci alla regolarizzazione, a partire dai classici lavori di Sperling, Levi-Civita e Kustaanheimo-Stiefel. In particolare, si studierà come la regolarizzazione di Levi-Civita nel piano, mediante trasformazioni conformi, e quella di Kustaanheimo-Stiefel nello spazio, mediante la struttura dei quaternioni, consentono di trasformare il problema di Keplero in un oscillatore armonico.

La parte conclusiva della tesi, di avviamento alla ricerca, può essere dedicata alla regolarizzazione come strumento per la ricerca di soluzioni periodiche di un problema di Keplero perturbato.

Riferimenti bibliografici

- Boscaggin Alberto; Ortega R; Zhao Lei Periodic solutions and regularization of a Kepler problem with time-dependent perturbation. *Disponibile in <https://arxiv.org/abs/1710.08782>*
- Kustaanheimo, P.; Stiefel, E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization. *J. Reine Angew. Math.* **218** (1965) 204–219
- Sperling, H. J. The collision singularity in a perturbed two-body problem. *Celestial Mech.* **1** 1969/1970 213–221
- Stiefel, E. L.; Scheifele, G. Linear and regular celestial mechanics. Perturbed two-body motion, numerical methods, canonical theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 174. *Springer-Verlag, New York-Heidelberg*, 1971
- Waldvogel, Jörg Quaternions for regularizing celestial mechanics: the right way. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 102 (2008), no. 1-3, 149–162.

2. Oscillazioni limitate e illimitate, oscillazioni in risonanza

Il problema dello studio delle oscillazioni di un sistema meccanico è un classico problema che si può formulare mediante semplici equazioni differenziali; l'esempio più semplice è lo studio dell'oscillatore armonico, eventualmente smorzato e forzato. Già in questo elementare modello si presentano vari fenomeni (esistenza di soluzioni periodiche, esistenza di soluzioni limitate ma non periodiche, battimenti, risonanza) a seconda delle situazioni.

Una tale ricchezza dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale si trova anche in

equazioni più complicate, che modellizzano fenomeni più complessi.

Obiettivo iniziale della tesi è studiare l'esistenza di soluzioni periodiche, di soluzioni limitate o di soluzioni illimitate per oscillatori armonici asimmetrici, a partire dai risultati di Fucik e Dancer degli anni '70 e di Alonso-Ortega degli anni '90, per arrivare a discutere recenti applicazioni a sistemi singolari con simmetria radiale.

La tesi si può sviluppare secondo filoni diversi, più o meno vicini a tematiche di ricerca attuale: problemi di limitatezza di soluzioni e teoria KAM, soluzioni periodiche di sistemi gravitazionali perturbati, estensione a sistemi di equazioni differenziali dei risultati validi per singole equazioni.

Riferimenti bibliografici

Fučík, Svatopluk Boundary value problems with jumping nonlinearities. *Časopis Pěst. Mat.* **101** (1976), no. 1, 69–87.

Alonso, José Miguel; Ortega, Rafael Roots of unity and unbounded motions of an asymmetric oscillator. *J. Differential Equations* **143** (1998), no. 1, 201–220.

Fonda, Alessandro; Toader, Rodica; Torres, Pedro J. Periodic motions in a gravitational central field with a rotating external force. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **113** (2012), no. 3, 335–342

Liu, Qihuai; Torres, Pedro J.; Qian, Dingbian Periodic, quasi-periodic and unbounded solutions of radially symmetric systems with repulsive singularities at resonance. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* **22** (2015), no. 5, 1115–1142.

Tesi di carattere teorico con aspetti e contenuti didattici

1. Il progetto MERLO nell'apprendimento dell'analisi matematica di base a livello universitario

Il progetto MERLO (acronimo di Meaning Equivalence Reusable Learning Objects) del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, guidato dai Proff. Arzarello e Robutti, mira a sviluppare all'interno dell'insegnamento della matematica la metodologia MERLO introdotta negli anni novanta all'Università di Toronto.

La metodologia MERLO favorisce l'apprendimento di un concetto matematico attraverso l'uso di diverse rappresentazioni semiotiche: richiede sia il riconoscimento del loro significato comune, sia la distinzione da rappresentazioni di un altro concetto che hanno una somiglianza apparente, dovuta alla presenza di termini o registri comuni.

La prima fase del progetto si è concentrata sull'introduzione di questa metodologia nella scuola secondaria di primo e di secondo grado.

Obiettivo della tesi è studiare i fondamenti teorici della metodologia MERLO, la sua applicazione nel contesto della scuola secondaria e l'implementazione in contesto universitario, per l'apprendimento di concetti di base di analisi matematica (limite, pendenza, integrale definito).

Riferimenti bibliografici

Etkind, M., Kenett, R. S., & Shafir, U. (2015). Learning in the Digital Age with Meaning Equivalence Reusable Learning Objects (MERLO). *Handbook of Research on Applied Learning Theory and Design in Modern Education*. Volume 1, Chapter 15, 310-333. IGI Global.

Arzarello, F., Robutti, O., & Carante, P. (2015). MERLO: a new tool and a new challenge in

mathematics teaching and learning. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 57-64. Hobart, Australia: PME.

Arzarello, F., Kenett, R.S., Robutti, O., Shafrir, U., Prodromou, T., & Carante, P. (2015). Teaching and assessing with new methodological tools (MERLO): a new pedagogy?. In M.A. Hersh & M. Kotecha (Eds.), *Proceedings of the First IMA International Conference on Barriers and Enablers to Learning Maths: Enhancing Learning and Teaching for All Learners*. Glasgow, Scotland, 10-12 June 2015.